سكاشن التحليل الدالى
الفرقة الرابعة تربية عام رياضيات
تحليل دالى

تمارين

(1) اثبت أن خط الاعداد الحقيقية يمثل فضاء مترى

(2) باستخدام متباينة المثلث اثبت أن

$$\left|d(x,y)-d(z,w)\right| \le d(x,z)+d(y,w)$$

نشاط داخل السكشن

باستخدام متباينة المثلث اثبت أن

$$\left|d(x,z)-d(y,z)\right| \le d(x,y)$$

(3) اثبت أن الفراغ الاقليدى R^n فراغ مترى

(4) اثبت ان الفراغ المتقطع X التى عرفت دالة المسافة له بالشكل

$$d(x,y)=\begin{cases}1; & x \ne y\\ 0; & x = y\end{cases}$$

انه فراغ مترى.

- نعرف الفضاء l^p بانه متتالية $x=(x_i)=(x_1,x_2,.....)$ من الاعداد بحيث يكون مجموع المتسلسلة $|x_1|^p, |x_2|^p, ...$ متقاربة أى أن

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p < \infty$$

حيث $p \ge 1$

تعرف دالة المسافة بالشكل

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \ge 1$$

نشاط داخل السكشن

اثبت أن l^p فضاء مترى

تمرين:

هـــــل $d(x,y)=(x-y)^2$ تحـــــدد متركـــــا علـــــى مجموعـــــة الاعـــــداد الحقيقيـــــة؟

تمرين:

بـــــين أن $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ تحـــــدد متركـــــا علـــــى مجموعـــــة الاعـــــداد الحقيقيـــــة؟

ملاحظة:

نهايـــــة متتاليـــــة تقاربيـــــة يجـــــب ان تكـــــون نقطـــــة تنتمـــــى للفضـــــاء X .

مثال:

المتتالية $x_n=\frac{1}{n}$ غير تقاربية في الفضاء $X=(0,1)$ لان نهايتها تساوى صفر وغير موجودة بالفضاء.

- اثبـت أنـه اذا كـان $x_n \to x, y_n \to y$ فـي الفضـاء X فـان $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.
- اعطـى مثـال لمتتاليـة تمثـل متتاليـة كوشـى ولكنهـا غيـر تقاربيـة. مـع توضـيح اجابتـك؟
- اثبت ان الفضاء l^∞ فضاء مترى. حيث ان l^∞ هو فضاء كل المتتاليات المحدودة من الاعداد المركبة.

وتعرف دالة المسافة علية بالعلاقة $d(x,y)=\sup|x_i-y_i|$.

- اثبت ان فضاء الدوال $C[a,b]$ فضاء مترى. حيث ان $C[a,b]$ هو فضاء كل الدوال الحقيقية (دوى) وهى معرفة ومستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$

وتعرف دالة المسافة علية بالعلاقة $d(x,y)=\max|x(t)-y(t)|$.

- اثبت أن الفراغ الاقليدى R^n فراغ مترى تام.

الفراغ المعيارى

- اثبت أن $\|0\|=0$

تمرين

- **اثبت ان**

$$(1)\ \big|\|y\|-\|x\|\big| \le \|y-x\|$$

$$(2)\ \big|\|y\|-\|x\|\big| \le \|y+x\|$$

- **اثبت ان الفضاء المعيارى فضاء متصل.**

- **اثبت ان**

$$(1)\, d(x+a, y+a) = d(x, y)$$

$$(2)\, d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$$

- اثبت أن الفضاء R^n فراغ معيارى حيث

$$(1)\, R^n : \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$(2)\, R^n : \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

فضاء الضرب الداخلى

- اثبت أن الفضاء R^n فضاء ضرب داخلى حيث
الضرب الداخلى معرف

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

- اثبت أن

$$\langle x, y \rangle \text{ is real} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

- اثبت $\langle x, x \rangle$ عدد حقيقى
- اثبت أنه فى اى فضاء ضرب داخلى فان

$$(1)\, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad , x, y \in X$$

$$(2)\, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \text{ if } K \in R$$

$$(3)\, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$$

****